DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2010.02.015

第23卷第2期 纺织高校基础科学学报 Vol.23, No.2
2010年6月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Jun., 2010

文章编号:1006-8341(2010)02-0188-03

关于Smarandache函数的一个方程

杨长恩

(咸阳师范学院 数学与信息科学学院,陕西 咸阳 712000)

摘要:$\forall n\in N_+$,著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为满足$\sum_{k=1}^{m}k$能被n整除的最小正整数m,即$Z(n)=\min\{m: n\mid(m(m+1))/2\}$. Smarandache互反函数$S_c(n)$定义为满足$y\mid n!$且$1\leqslant y\leqslant m$的最大正整数$m$,即$S_c(n)=\max\{m: y\mid n!, 1\leqslant y\leqslant m, m+1\nmid n!\}$.借助同余方程,利用初等方法,分析数论函数性质,研究了包含伪Smarandache函数$Z(n)$、Smarandache互反函数$S_c(n)$的方程$S_c(n)+Z(n)=2n$的解的问题,并给出一些有趣的结果.

关键词:伪Smarandache函数;Smarandache互反函数;方程的解

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

1 引言与及结论

$\forall n\in N_+$,著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$,即$S(n)=\min\{m: n\mid m!\}$.而著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为满足$\sum_{k=1}^{m}k$能被n整除的最小正整数m,即$Z(n)=\min\{m: n\mid(m(m+1))/2\}$.例如,$Z(n)$的前几个值为$Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=5$, $Z(6)=3$, $Z(7)=6$, $Z(8)=15$, $Z(9)=9$, $Z(10)=4$, $Z(11)=10$, $Z(12)=8$, $Z(13)=12$, $Z(14)=7$, $Z(15)=5$, $Z(16)=31$, $Z(17)=16$, $Z(18)=8$, $Z(19)=18$, $Z(20)=15$, ….

关于$S(n)$和$Z(n)$函数,许多学者研究了它们的性质,并得到了一些重要的结果[1-6].文献[6]研究了方程$Z(n)=S(n)$, $Z(n)+1=S(n)$的可解性,并给出了方程全部正整数解.

文献[7]引进了著名的Smarandache互反函数$S_c(n)$, $S_c(n)$定义为

$$\max\{m: y\mid n!, 1\leqslant y\leqslant m, m+1\nmid n!\}.$$

例如,$S_c(n)$的前几项为$S_c(1)=1$; $S_c(2)=2$, $S_c(3)=3$, $S_c(4)=4$, $S_c(5)=6$, $S_c(6)=6$, $S_c(7)=10$, $S_c(8)=10$, $S_c(9)=10$, $S_c(10)=10$, $S_c(11)=12$, $S_c(12)=12$, $S_c(13)=16$, $S_c(14)=16$, $S_c(15)=16$, ….文献[7]还研究了$S_c(n)$的初等性质,证明了若$S_c(n)=x$且$n\neq 3$,则$x+1$是大于n的最小素数.文献[6]同时研究了$S_c(n)$函数和$Z(n)$函数之间的关系方程$Z(n)+S_c(n)=2n$,得到了一些重要结果,并提出了下面的

收稿日期:2009-09-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介:杨长恩(1957-),男,陕西省咸阳市人,咸阳师范学院副教授.E-mail:yangchangen57@163.com

猜测 对 $n\in N_+$，方程 $Sc(n)+Z(n)=2n$ 成立当且仅当 $n=1, 3^\alpha, p^{2\beta+1}$，$\alpha$ 为使得 $3^\alpha+2$ 为素数且大于等于 2的整数，$p\geqslant 5$ 为素数，β 为使得 $p^{2\beta+1}+2$ 为素数的任意正整数.

本文证实了这一猜测，得到了下面的定理：

定理 1 当 n 是奇正整数时，方程 $Sc(n)+Z(n)=2n$ 的解为且只能为 $n=1, 3^\alpha, p^{2\beta+1}$，$\alpha$ 为使得 $3^\alpha+2$ 为素数且大于等于 2的整数，$p\geqslant 5$ 为素数，β 为使得 $p^{2\beta+1}+2$ 为素数的任意正整数.

定理 2 当 n 是偶数时（1）n 为 2的幂时，n 不是方程 $Sc(n)+Z(n)=2n$ 的解；（2）n 是充分大的偶数，且 n 至少有 3个不同的素因子时，n 不是方程 $Sc(n)+Z(n)=2n$ 的解.

2 定理的证明

2.1 引理

引理 1 若 $Sc(n)=x\in N_+$，且 $n\neq 3$，则 $x+1$ 为大于 n 的最小素数.

引理 2 （1）若 $\alpha\in N_+$，则 $Z(2^\alpha)=2^{\alpha+1}-1$.（2）若 p 是不等于 2的素数，$\alpha\in N_+$，则 $Z(p^\alpha)=p^\alpha-1$.

引理 3 当 $n\in N_+$，且 $n\geqslant 59$ 时，则有 $Sc(n)<3n/2$.

引理 4 当正整数 n 充分大时，在 n 与 $n+n^{7/12}$ 之间必有一个素数.

引理 1 ~ 4的证明参见文献 [7-9].

2.2 定理 1的证明

当 n 是奇正整数时，分 6种情况来证明.

（1） $n=1$ 满足原方程.

（2） $n=3$，$Z(3)=2$，$Sc(3)=3$，故 3不是原方程的解.

（3） $n=3^\alpha$ （$\alpha\geqslant 2$），且 $3^\alpha+2$ 为素数，则 $Sc(3^\alpha)=3^\alpha+1$，$Z(3^\alpha)=3^\alpha-1$，故 3^α 是原方程的解.

（4） $n=3^\alpha$ （$\alpha\geqslant 2$），且 $3^\alpha+2$ 不为素数，则由引理 1与引理 2，有 $Sc(3^\alpha)>3^\alpha+1$，$Z(3^\alpha)=3^\alpha-1$，故 3^α 不是原方程的解.

（5） $n=p^\gamma$，$\gamma\geqslant 1$，$p\geqslant 5$ 为素数，则 $Z(p^\gamma)=p^\gamma-1$ 且 $n\neq 3$，这时分 2种情况：

（ⅰ）若 $n=p^{2\beta}$，$\beta\geqslant 1$，则 $p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 3)$，于是 $p^{2\beta}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，从而 $p^{2\beta}+2\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $p^{2\beta}+2$ 不可能为素数，故由引理 1，此时的 n 不是原方程的解.

（ⅱ）若 $n=p^{2\beta+1}$，其中 $p\geqslant 5$ 为素数，β 为使得 $p^{2\beta+1}+2$ 为素数的任意正整数，由引理 1，得 $Sc(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}+1$，由引理 1，得 $Z(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}-1$，则 $Sc(p^{2\beta+1})+Z(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}+1+p^{2\beta+1}-1=2p^{2\beta+1}$，故 $n=p^{2\beta+1}$ 时原方程成立. 若 $p^{2\beta+1}+2$ 不为素数，则由引理 1，得 $Sc(p^{2\beta+1})>p^{2\beta+1}$，知 $n=p^{2\beta+1}$ 不是原方程的解.

（6） $2\nmid n$，$n=p_1^{\alpha_1}n_1$，$(p_1, n_1)=1$，$\alpha_1\geqslant 1$，$p_1\geqslant 3$ 为素数，由同余方程 $n_1x\equiv 1(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1})$ 有解，进而可得同余方程 $n_1^2x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1})$ 有解，其解不妨设为 y，则可取 $1\leqslant y\leqslant p_1^{\alpha_1}-1$，又 $p_1^{\alpha_1}-y$ 亦为前面同余方程的解，则可取 $1\leqslant y\leqslant (p_1^{\alpha_1}-1)/2$. 由 $n_1^2y^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1})$，则 $p_1^{\alpha_1}\mid(n_1y-1)(n_1y+1)$，而 $(n_1y-1, n_1y+1)\mid 2$，于是 $(p_1^{\alpha_1}-1)\mid(n_1y-1)$ 或 $(p_1^{\alpha_1}-1)\mid(n_1y+1)$.

若 $(p_1^{\alpha_1}-1)\mid(n_1y-1)$，则 $n=p_1^{\alpha_1}n_2\mid(n_1y-1)(n_1y)/2$，从而

$$Z(n)=m\leqslant n_1y-1\leqslant (p_1^{\alpha_1}-1)n_1/2-1\leqslant n/2.$$

若 $(p_1^{\alpha_1}-1)\mid(n_1y+1)$，则 $n=p_1^{\alpha_1}n_1\mid(n_1y+1)(n_1y)/2$，从而

$$Z(n)=m\leqslant n_1y\leqslant (p_1^{\alpha_1}-1)n_1/2\leqslant n/2.$$

由引理 3，当 $n\geqslant 59$ 时，则有 $Sc(n)+Z(n)<3n/2+n/2=2n$，故此时的 n 不满足原方程. 而当 $n<59$ 时可编程进行检验这种情况下的 n 不满足原方程. 综上所述，定理 1成立.

2.3 定理 2的证明

（1） 当 $n=2^\alpha$，$\alpha\geqslant 1$，$Z(2^\alpha)=2^\alpha-1$，$Sc(2^\alpha)>1$，故 $n=2^\alpha$ 不满足原方程.

（2） $n=2kp^\alpha$，$\alpha\geqslant 1$，$(2k, p^\alpha)=1$，$p\geqslant 3$ 为素数，由同余方程 $4kx\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^\alpha)$ 有解，可得同余方程 $16k^2x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^\alpha)$ 有解，其解不妨设为 y，则可取 $1\leqslant y\leqslant p^\alpha-1$，又 $p^\alpha-y$ 亦为前面同余方程的解，则可取 $1\leqslant y\leqslant (p^\alpha-1/2)$. 由 $16k^2y^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^\alpha)$，则 $p^\alpha\mid(4ky-1)(4ky+1)$，而 $(4ky-1, 4ky+1)=1$，于是 $p^\alpha\mid(4ky-1)$ 或 $p^\alpha\mid(4ky+1)$.

若 $p \mid (4k\gamma-1)$, 则 $n=2kp \mid 4k\gamma(4k\gamma-1)/2$, 从而有

$$Z(n)=m\leqslant 4k\gamma-1\leqslant 4k(p-1)/2-1\leqslant n-2k-1\leqslant (1-1/p)n.$$

若 $p \mid (4k\gamma+1)$, 则 $n=2kp \mid 4k\gamma(4k\gamma+1)/2$, 从而也有

$$Z(n)=m\leqslant 4k\gamma\leqslant 4k(p-1)/2\leqslant n-2k=(1-1/p)n.$$

(3) $n=2^{\alpha}(2k+1)$, $\alpha\geqslant 1$, $k\geqslant 1$, 则同余方程 $(2k+1)x\equiv 1\pmod{2^{\alpha+1}}$ 与 $(2k+1)x\equiv -1\pmod{2^{\alpha+1}}$ 均必有解, 且为奇数, 设 a 为同余方程 $(2k+1)x\equiv 1\pmod{2^{\alpha+1}}$ 的解, 若 $1\leqslant a\leqslant 2^{\alpha}-1$, 则取 a 即可, 否则 $2^{\alpha}+1\leqslant a\leqslant 2^{\alpha+1}-1$, 则 $2^{\alpha+1}-a\leqslant 2^{\alpha+1}-2^{\alpha}-1=2^{\alpha}-1$, 且 $2^{\alpha+1}-a$ 满足同余方程 $(2k+1)x\equiv -1\pmod{2^{\alpha+1}}$, 故2个同余方程中必有一个满足 $1\leqslant a\leqslant 2^{\alpha}-1$ 的解 a, 则 $2^{\alpha+1}\mid[(2k+1)a+1]$ 或 $2^{\alpha+1}\mid[(2k+1)a-1]$.

若 $2^{\alpha+1}\mid[(2k+1)a+1]$, 则 $2^{\alpha+1}(2k+1)\mid[(2k+1)a+1](2k+1)$, 从而

$$Z(n)\leqslant a(2k+1)\leqslant(2^{\alpha}-1)(2k+1)\leqslant(1-1/2^{\alpha})n.$$

而当 $2^{\alpha+1}\mid[(2k+1)a-1]$ 时, 同理也有 $Z(n)\leqslant(1-1/2^{\alpha})n$.

总之, 对于(2)、(3)2种情况, 即 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ($\alpha\geqslant 1$, $\alpha_i\geqslant 1$, $k\geqslant 2$) 为其标准素分解式, 令 $q=\min\{2^{\alpha}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}$, 则 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}>q^3$, 从而 $q<\sqrt[3]{n}$, 则

$$Z(n)\leqslant n(1-1/q)<n(1-1/\sqrt[3]{n})=n-n^{2/3},$$

这样, 当 n 充分大时, 由引理4 $Sc(n)+Z(n)<n+n^{7/12}+n-n^{2/3}<2n$, 即该 n 不满足原方程. 综上所述, 定理2成立.

而对于 $n=2^{\alpha}p^{\beta}$, $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$, $(2,p)=1$, p 为素数的情形需要进一步讨论.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] PEREZ M L. Florentin Smarandache denitions, solved and unsolved problems, conjectures and theorems in number theory and geometry[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.

[3] 路玉麟. 一个包含Smarandache函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 253-254.

[4] 张文鹏. 关于F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报, 2008, 38(2): 173-176.

[5] GORSKI David. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[6] ZHANG Wenpeng, LI Ling. Two problems related to the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 1-3.

[7] MURTHY A. Smarandache reciprocal function and an elementary inequality[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11: 312-315.

[8] MAJUMDAR A A K. A note on the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1-25.

[9] HUXLEY M N. The distribution of prime numbers[M]. Oxford: Oxford University Press, 1972.

An equation concerning the Smarandache function

YANG Chang-en

(College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang, Shaanxi 712000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous pseudo Smarandache function $Z(n)$ is defined as $\min\{m: n\mid m(m+1)/2\}$. The Smarandache reciprocal function $Sc(n)$ is defined as $\max\{m: y\mid n!, 1\leqslant y\leqslant m, m+1\nmid n!\}$. Based on the analysis of the properties for $Z(n)$ and $Sc(n)$, the solution of the equation $Sc(n)+Z(n)=2n$ is discussed. Some results about the solution are obtained, by using the congruence equation theory as well as the elementary method.

Key words: pseudo Smarandache function; Smarandache reciprocal function; solution of the equation

编辑、校对: 黄燕萍